Corrigés des exercices de 5.1 à 5.20 حلول التمارين من 1.5 إلى 20.5

Exercice 5.1 :

a/ Puisque le mouvement est circulaire, la vitesse linéaire du corps est : $\boxed{v = \omega r}$

Convertissons la vitesse angulaire dans les unités du système international :

$$\omega = \frac{10.6,28}{60} \simeq 1,05 rad.s^{-1}$$

Calculons le rayon du mouvement circulaire qu'effectue le corps autour de l'axe EE' :

$$r = l.\sin 60° \quad , \quad r = 4,5.0,87 \Rightarrow r = 3,9m$$

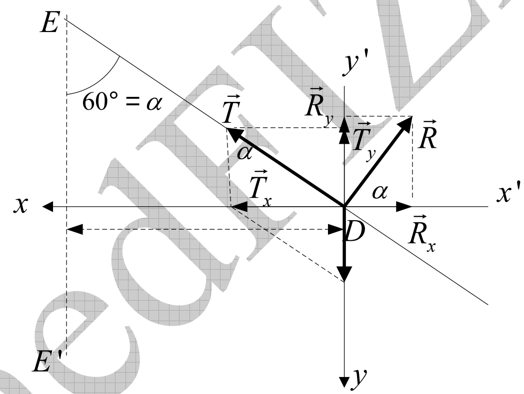
D'où : $v = 1,05.3,9 \Rightarrow \boxed{v \simeq 4,1 ms^{-1}}$

b/ Calcul de l'intensité de la force de réaction du plan sur le corps : le corps est en mouvement circulaire uniforme sous l'action de forces dont la résultante est une force centrale de module $m\omega^2$. Projetons les différentes forces sur les deux axes (voir figure).

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\omega^2 r.\vec{i}$$

$$T.\sin\alpha - R.\cos\alpha = m\omega^2 r \rightarrow (1)$$

$$P - R.\sin\alpha - T.\cos\alpha = 0 \rightarrow (2)$$



Eliminons la tension entre les deux équations (1) et (2) pour obtenir le module de la réaction :

$$\frac{T.\sin\alpha}{T.\cos\alpha} = \frac{R.\cos\alpha + m\omega^2 r}{P - R.\sin\alpha} \Rightarrow tg\alpha = \frac{R.\cos\alpha + m\omega^2 r}{P - R.\sin\alpha}$$

$$\boxed{R = m\left(g.\sin\alpha - \omega^2.r.\cos\alpha\right)} \rightarrow (3) \quad ; \quad \boxed{R \simeq 37N}$$

c/ La tension du fil peut être calculée à partir de l'une des deux équations (1) ou (2) :

$$T = \frac{R.\cos\alpha + m\omega^2 r}{\sin\alpha} \rightarrow \boxed{T \simeq 46,4N}$$

$$T = \frac{P - R.\sin\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \boxed{T \simeq 43.42N}$$

La différence entre les deux valeurs de la tension est due à la valeur approchée que nous avons prise pour chaque cas.

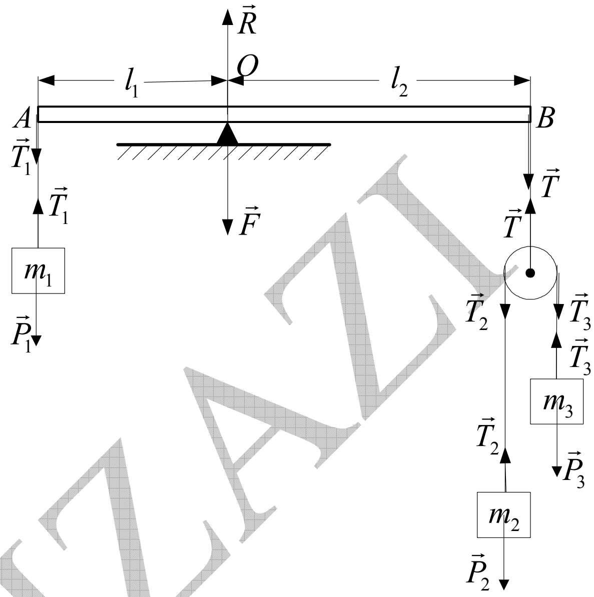
d/ La vitesse angulaire nécessaire pour que la réaction du plan sur le corps s'annule est déduite de l'équation (3) :

$$R = m\left(g.\sin\alpha - \omega^2.r.\cos\alpha\right) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g.\sin\alpha}{r.\cos\alpha} = \frac{g.\sin\alpha}{l.\sin\alpha.\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}}\ ,\ \boxed{\omega \simeq 2,1 rad.s^{-1}}$$

Exercice 5.2 :

1/ Nous représentons toutes les forces agissant sur le système. L'équilibre du système est vérifié si la somme algébrique des moments des forces appliquées sur la barre par rapport à l'axe (le couteau) est nulle, soit : $\tau_{\vec{T}/\Delta} = \tau_{\vec{T}_1/\Delta}$



Pour calculer l'intensité de la tension $\vec{T}$, on doit calculer d'abord l'accélération des deux masses m_2 et m_3 par rapport à la poulie en rotation sans translation. Pour cela on applique la relation fondamentale de la dynamique :

$$\left.\begin{array}{l} P_3 - T_3 = m_3.a \\ -P_2 + T_2 = m_2.a \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} g}$$

D'où :

$$\left.\begin{array}{l} P_3 - T_3 = m_3.a \Rightarrow T_3 = m_3\left(g - a\right) \\ -P_2 + T_2 = m_2.a \Rightarrow T_2 = m_2\left(g + a\right) \\ a = \dfrac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} g \\ T = T_2 + T_3\ ,\ T = m_2\left(g + a\right) + m_3\left(g - a\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{T = 4g\frac{m_2.m_3}{m_2 + m_3}}$$

Pour m_1 : $P_1 = T_1$

D'après le théorème des moments : $\tau_{\vec{T}/\Delta} = \tau_{\vec{T}_1/\Delta} \Rightarrow T_1.l_1 = T.l_2$

Et à la fin : $m_1 g.l_1 = 4g\dfrac{m_2.m_3}{m_2 + m_3}.l_2 \Rightarrow \boxed{m_1\left(m_2 + m_3\right).l_1 = 4m_2 m_3.l_2}$

2/ La force appliquée par le couteau sur la barre est égale à la résultante des deux forces parallèles $\vec{T}$ et $\vec{T}_1$:

$$\vec{R} = \vec{T}_1 + \vec{T} \Rightarrow \boxed{R = g\left(m_1 + \frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3}\right)}$$

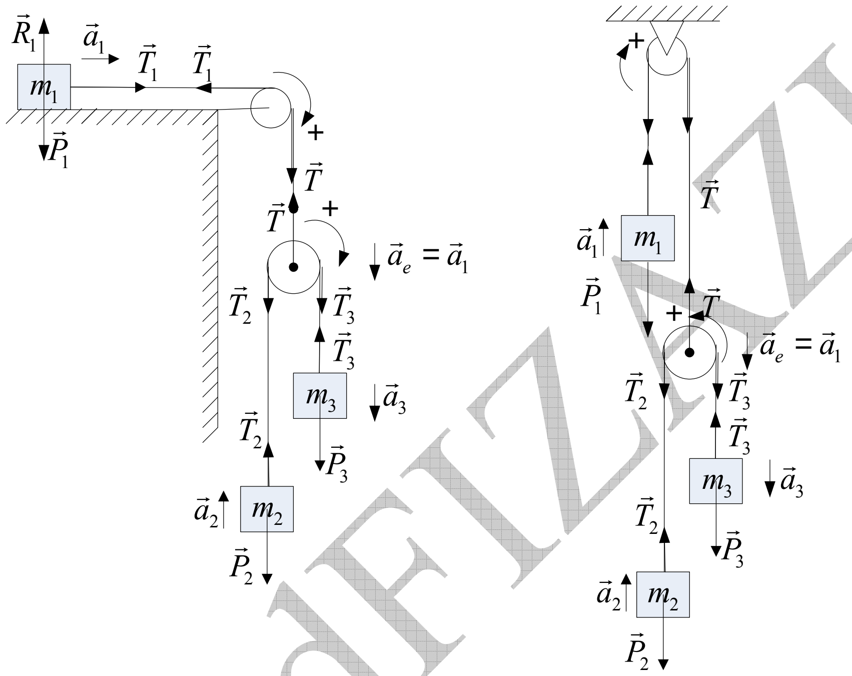
Exercice 5.3 :

Premier cas : (voir figure ci-dessous).

Nous sommes en présence d'un exercice de dynamique associé au mouvement relatif.

Commençons par appliquer le principe de la relation fondamentale aux masses m_1 , m_2 et m_3 :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{P}_3 + \vec{T}_3 = m_3.\vec{a}_3 \\ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2.\vec{a}_2 \\ \vec{T}_2 = \vec{T}_3 = \dfrac{1}{2}\vec{T}_1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ 2\vec{P}_3 + \vec{T}_1 = 2m_3.\vec{a}_3 \\ 2\vec{P}_2 + \vec{T}_1 = 2m_2.\vec{a}_2 \end{array}\right.$$



Premier cas **Deuxième cas**

Nous connaissons la loi de composition des accélérations pour le mouvement relatif de translation (sans rotation) : $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$. L'accélération d'entraînement est égale à l'accélération de la poulie en translation, c'est-à-dire à l'accélération de la masse m_1 $(\vec{a}_e = \vec{a}_1)$. Quant à l'accélération relative $\vec{a}$ elle est commune aux deux masses m_2 et m_3 .

En tenant compte du sens indiqué sur la figure :

Pour la masse m_2 l'accélération absolue est : $a_2 = a_r - a_1$

Pour la masse m_3 l'accélération absolue est : $a_3 = a_r + a_1$

Par projection, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} T_1 = ma_1 \rightarrow (1) \\ T_1 - 2P_2 = 2m_2\left(a_r - a_1\right) \rightarrow (2) \\ -T_1 + 2P_3 = 2m_3\left(a_r + a_1\right) \rightarrow (3) \end{cases}$$

Nous venons d'obtenir un système d'équations à trois inconnues. L'accélération relative commune est déduite de l'équation (3) :

$$\boxed{a_r = \frac{2m_3 g - 2m_3 a_1 - m_1 a_1}{2m_3} g} \rightarrow (4)$$

Remplaçons a par sa valeur tirée de l'équation (2) pour trouver l'expression de l'accélération a_1 de la masse m_1 :

$$\boxed{a_1 = \frac{4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g} \rightarrow (5)$$

Revenons à l'expression (4) pour calculer l'accélération relative en remplaçant l'accélération absolue par sa valeur que nous avons trouvée dans l'équation (5) :

$$\boxed{a_r = \frac{m_3m_1 - m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g} \rightarrow (6)$$

Il devient facile maintenant de déduire les deux accélérations restantes a_2 et a_3.

L'accélération a_2 de la masse m_2 :

$$a_2 = a_r - a_1 \;\; ; \;\; a_2 = \frac{m_3m_1 - m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g - \frac{4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$\boxed{a_2 = \frac{m_3m_1 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g}$$

L'accélération a_3 de la masse m_3 :

$$a_3 = a_r + a_1 \;\; ; \;\; a_3 = \frac{m_3m_1 - m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g + \frac{4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$\boxed{a_3 = \frac{m_3m_1 - m_1m_2 + 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g}$$

<u>Deuxième cas</u> : (voir figure ci-dessus)

Nous commençons par appliquer la relation fondamentale de la dynamique aux masses m_1 , m_2 et m_3:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{P}_3 + \vec{T}_3 = m_3.\vec{a}_3 \\ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2.\vec{a}_2 \\ \vec{T}_2 = \vec{T}_3 = \dfrac{1}{2}\vec{T}_1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ 2\vec{P}_3 + \vec{T}_1 = 2m_3.\vec{a}_3 \\ 2\vec{P}_2 + \vec{T}_1 = 2m_2.\vec{a}_2 \end{array}\right.$$

Comme dans le premier cas $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$. L'accélération d'entraînement est égale à l'accélération de la poulie en translation, c'est-à-dire à l'accélération de la masse m_1 $(\vec{a}_e = \vec{a}_1)$. Quant à l'accélération relative $\vec{a}$ elle est commune aux deux masses m_2 et m_3 .

En tenant compte du sens indiqué sur la figure :

Pour la masse m_2 son accélération absolue est : $a_2 = a_r - a_1$

Pour la masse m_3 son accélération absolue est : $a_3 = a_r + a_1$

Par projection, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} T_1 = ma_1 \rightarrow (8) \\ T_1 - 2P_2 = 2m_2\left(a_r - a_1\right) \rightarrow (9) \\ -T_1 + 2P_3 = 2m_3\left(a_r + a_1\right) \rightarrow (10) \end{cases}$$

Nous venons d'établir un système de trois équations à trois inconnues.

Nous en déduisons l'accélération relative commune de l'équation (9) :

$$\boxed{a_r = \frac{\left(m_1 - 2m_2\right)g - \left(m_1 + 2m_2\right)a_1}{2m_2} g} \rightarrow (11)$$

En remplaçant a par sa valeur dans l'équation (10) nous trouvons l'expression de l'accélération a_1 de la masse m_1 :

$$\boxed{a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g} \rightarrow (12)$$

En revenant à l'expression (11) nous calculons l'accélération relative en remplaçant l'accélération absolue par sa valeur que nous venons de trouver dans l'équation (12) :

$$\boxed{a_r = \frac{2m_3m_1 - 2m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g} \rightarrow (13)$$

Il est facile à présent d'en déduire les deux accélérations manquantes.

Expression de l'accélération a_2 de la masse m_2 :

$$a_2 = a_r - a_1 \;\; ; \;\; a_2 = \frac{2m_3m_1 - 2m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g - \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$\boxed{a_2 = \frac{3m_3m_1 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g}$$

Expression de l'accélération a_3 de la masse m_3 :

$$a_3 = a_r + a_1 \;\; ; \;\; a_3 = \frac{2m_3m_1 - 2m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g + \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$\boxed{a_3 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_3 - 3m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g}$$

Exercice 5.4 :

a/ Angle d'inclinaison nécessaire pour que le corps décolle.

Quand la force de frottement statique atteint sa valeur maximale pour un angle de décollage θ_0, appelé angle de frottement et qui est un angle limite, elle s'équilibre avec la composante du poids $\vec{P}_x$, à ce moment là, le corps décolle :

$$\left.\begin{array}{l} f_{s,\max} = P_x = mg\sin\theta_0 \\ f_{s,\max} = \mu N \\ N = P_y = mg\cos\theta_0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{tg\theta_0 = \mu} \;\; , \;\; tg\theta_0 = 0,80 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = 38,66°}$$

b/ Intensité de la force de frottement maximale :

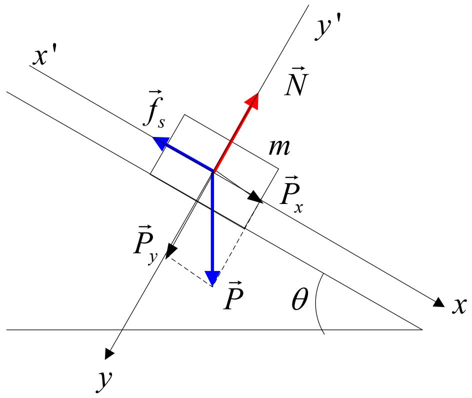
$$\boxed{f_{s,\max} = \mu N} \;\; , \;\; \boxed{f_{s,\max} = 3,13N}$$

c/ La force normale pour l'angle $35°$:

$$\boxed{N = P_y = mg\cos\theta} \; , \; \boxed{N = 4{,}1N}$$

d/ Force de frottement pour l'angle $35°$:

$$\boxed{f_s = P_x = mg\sin\theta} \; , \; \boxed{f_s = 2{,}87N}$$



Exercice 5.5 :

a/ Angle d'inclinaison nécessaire pour que le corps se déplace à vitesse constante, cela veut dire que la somme des forces doit être nulle :

$$\vec{f}_c + \vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$$

Par projection sur les deux axes, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} P_x - f_c = 0 \Rightarrow mg\sin\theta_0 = \mu_c N \\ P_y - N = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta_0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{tg\theta_0 = \mu_c} \; , \; tg\theta_0 = 0{,}40 \; , \; \boxed{\theta_0 = 21{,}8°}$$

b/ Force de frottement pour l'angle $35°$:

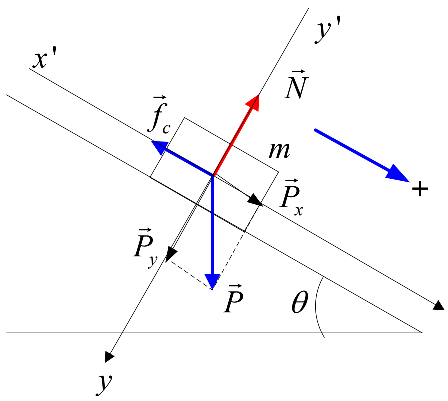
$$\boxed{N = mg\cos\theta} \; , \; \boxed{N = 6{,}55N}$$

c/ Force de frottement cinétique pour l'angle $35°$:

$$\boxed{f_c = \mu_c N} \; ; \; \boxed{f_c = 2{,}62N}$$

d/ Accélération pour l'angle $35°$:

$$mg\sin\theta - f_c = ma \Rightarrow \boxed{\frac{mg\sin\theta - f_c}{m}} \; , \; \boxed{a = 2{,}46N}$$



Exercice 5.6 :

a/ Pour que le système glisse, tout en maintenant ensemble les deux corps, il faut que les deux corps aient la même vitesse, donc la même accélération par rapport au plan fixe.(Du

point de vue du mouvement relatif, il faut que l'accélération absolue du corps B soit égale à l'accélération d'entraînement du corps A).

Soit $\vec{F}$, la force qu'il faut appliquer sur le corps A pour que le système glisse tout en maintenant les deux corps ensembles. Figure (a)

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique pour calculer l'accélération des deux corps :

Pour le corps A :

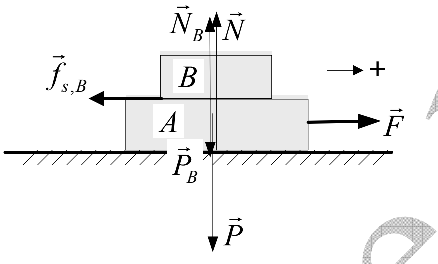
$$\vec{F}+\underbrace{\vec{P}+\vec{N}}_{\vec{0}}=\left(m_A+m_B\right).\vec{a} \;\;,\;\; F=\left(m_A+m_B\right).a \Rightarrow a=\frac{F}{m_A+m_B} \rightarrow (1)$$

Pour le corps B : par rapport au repère fixe il est en mouvement, mais par rapport au corps A il est au repos. C'est pour cette raison que la force de frottement agissant sur lui est une force de frottement statique. On peut donc écrire :

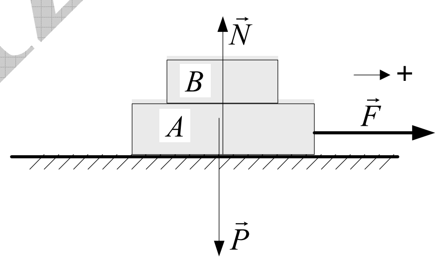
$$\left.\begin{array}{l} -f_{s,\max,A}=m_A.a \\ f_{s,\max,A}=\mu_s N_A \\ N_A=P_A=m_A g \end{array}\right| \Rightarrow a=\frac{-\mu_s m_A g}{m_A} \Rightarrow a=-\mu_s g \rightarrow (2)$$

Pour en déduire la force, il suffit d'égaler les deux équations (1) et (2) :

$$a=\frac{F}{m_A+m_B}=-\mu_s g \Rightarrow \boxed{F=\mu_s\left(m_A+m_B\right)g} \;,\; \boxed{F=15,7N}$$



(a)



(b)

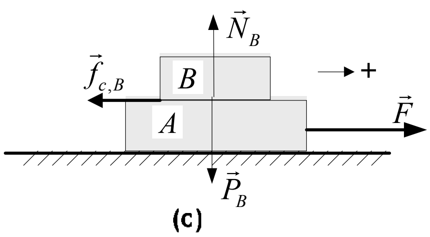
b/ Accélération du système quand on applique la force $\vec{F}$:

Par rapport au plan de glissement il n'y a pas de force de frottement. Le système est donc soumis au forces $\vec{P},\vec{N}$ et $\vec{F}$. Figure (b)

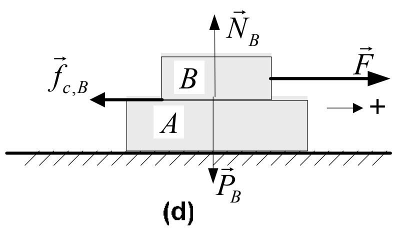
La relation fondamentale de la dynamique nous permet d'écrire :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P}+\vec{N}=\vec{0} \\ F=\left(m_A+m_B\right)a \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a=\frac{F}{\left(m_A+m_B\right)}} \;,\; \boxed{a=1,96ms^{-2}}$$

c/ Accélération du corps B , par rapport au corps A , si la force est appliquée sur le corps A (figure (c)) :



(c)



(d)

Le corps B est soumis à trois forces $\vec{P}_B,\vec{N}_B$ et $\vec{f}_{c,B}$ (force de frottement cinétique, car le

Corps B est en mouvement par rapport au corps A). Le corps A qui est soumis à la force $\vec{F}$ porte le corps B.
Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au corps B :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P}_B + \vec{N}_B = \vec{0} \\ -f_{c,B} = m_B a' \\ f_{c,B} = \mu_c N_B \\ N_B = m_B g \end{array}\right| \Rightarrow a' = \frac{\mu_c m_B g}{m_B} \Rightarrow \boxed{a' = -\mu_c g}\ ,\ \boxed{a' = -0,98 ms^{-2}}$$

Le signe négatif indique que le corps est attiré dans le sens contraire de celui du mouvement.

L'accélération du corps B si la force qui lui est appliquée est la même (figure (d)). Dans ce cas le corps B est soumis à quatre forces $\vec{P}_B, \vec{N}_B, \vec{F}$ et $\vec{f}_{c,B}$. Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au corps B :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P} + \vec{N} = \vec{0} \\ F - f_{c,B} = m_B a'' \\ f_{c,B} = \mu_c N_B \\ N_B = m_B g \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a'' = \frac{F - \mu_c m_B g}{m_B}}\ ,\ \boxed{a'' = +0,98 ms^{-2}}$$

Le signe plus indique que le corps B est attiré dans le sens du mouvement.

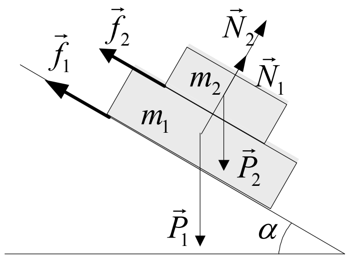
<u>Exercice 5.7 :</u>

On applique la relation fondamentale de la dynamique aux deux masses :

$$\vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = m_1 \vec{a}_1$$
$$\vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{f}_2 = m_2 \vec{a}_2$$

On projette les relations sur l'axe parallèle au plan incliné :

$$m_1 g \sin\alpha - f_1 - f_2 = m_1 a_1 \rightarrow (1)$$
$$m_2 g \sin\alpha_1 - f_2 = m_1 a_2 \rightarrow (2)$$



On exprime les deux forces de frottement cinétique :

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = h_1 (N_1 + N_2) \\ N_1 = m_1 g \cos\alpha \\ N_2 = m_2 g \cos\alpha \end{array}\right| \Rightarrow f_1 = h_1 g (m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_2 = h_2 N_2 \\ N_2 = m_2 g \cos\alpha \end{array}\right| \Rightarrow f_2 = h_2 m_2 g \cos\alpha$$

On remplace les forces de frottement cinétique dans les deux équations (1) et (2) pour obtenir les deux nouvelles équations :

$$m_1 g \sin\alpha - m_2 g h_2 \cos\alpha - h_1 g (m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\alpha) = m_1 a_1 \rightarrow (3)$$
$$m_2 g \sin\alpha_1 - h_2 m_2 g \cos\alpha = m_2 a_2\ (4)$$

On en déduit maintenant les deux accélérations à partie des équations (3) et (4) :

$$\boxed{a_1 = g\left(\sin\alpha - h_1\cos\alpha\right) - \frac{m_2}{m_1} g\cos\alpha\left(h_2 + h_1\right)} \rightarrow \boxed{a_1 = 3,53ms^{-2}}$$

$$\boxed{a_2 = g\left(\sin\alpha - h_2\cos\alpha\right)} \rightarrow \boxed{a_2 = 7,79ms^{-2}}$$

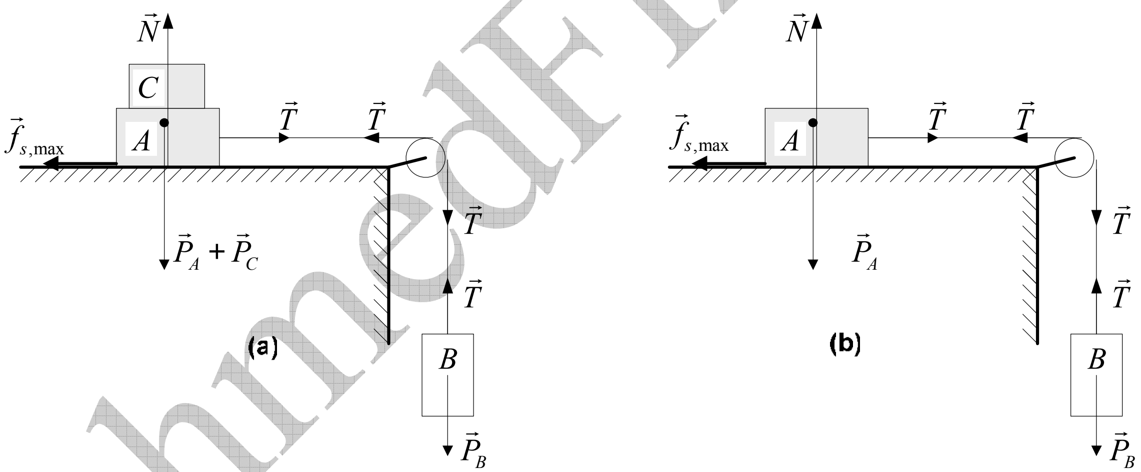
Exercice 5.8 :

Pour calculer la masse du corps C, nous avons représenté sur la figure (a) toutes les forces agissant sur le système. Les conditions de décollage, c'est à dire pour que le système entame son mouvement, est $T = f_{s,\max}$ et $T = P_B$:

$$\left.\begin{array}{l} T = f_{s,\max} \\ T = P_B = m_B g \\ f_{s,\max} = \mu_s N \\ N = P_A = \left(m_A + m_C\right) g \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{m_C = \frac{\left(m_B - \mu_s m_A\right)}{\mu_s}} \;,\; \boxed{m_C = 15kg}$$

Lorsque on enlève le corps C (figure(b)), nous obtenons l'accélération en appliquant la relation fondamentale de la dynamique au système :

$$\left.\begin{array}{l} T - f_c = m_A a \\ P_B - T = m_B a \\ f_c = \mu_c m_A g \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = \frac{\left(m_B - \mu_c m_A\right) g}{m_B + m_A}} \;,\; \boxed{a = 1.36ms^{-2}}$$



Exercice 5.9 :

I/ **Lancement dans le vide** :

1/ Faisons l'inventaire de toutes les forces et faisons un schéma, puis appliquons la relation fondamentale de la dynamique. La seule force qui agit sur le point matériel est son poids $\vec{P}$. Donc :

$$\left.\begin{array}{l} \sum \vec{F} = \vec{P} = m\vec{a} \\ \vec{P} = m\vec{g} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g} = -g.\vec{u}_z}$$

2/ A chaque instant $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_z$

Suivant l'axe des X, le mouvement est rectiligne uniforme :

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow v_x = v_{0x} = v_0.\cos\theta \rightarrow (1)$$

Suivant l'axe des Z, le mouvement est rectiligne uniformément varié :

$$\sum \vec{F}_z = \vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow a_z = -g = Cte$$
$$v_z = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin\theta \rightarrow (2)$$

Le vecteur de la vitesse instantanée est donc :

$$\vec{v} = v_x.\vec{u}_x + v_z.\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\vec{v} = v_0.\cos\theta.\vec{u}_x + (-gt + v_0 \sin\theta).\vec{u}_z} \rightarrow (3)$$

3/ Intégrons l'expression (3) pour obtenir le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \int_0^{\overrightarrow{OM}} d\overrightarrow{OM} = \int_0^t \left[v_0.\cos\theta.\vec{u}_x + (-gt + v_0 \sin\theta).\vec{u}_z \right] dt$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \Big(\underbrace{v_0.\cos\theta.t}_{x}\Big).\vec{u}_x + \Big(\underbrace{-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta.t}_{z}\Big).\vec{u}_z} \rightarrow (4)$$

4/ Le projectile atteint sa portée lorsque sa hauteur s'annule $(z=0)$. Calculons en premier lieu l'instant pour lequel $(z=0)$:

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta.t = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g} \end{cases}$$

Remplaçons le temps dans l'équation de la coordonnée x pour trouver la portée :

$$x = v_0.\cos\theta.t \Rightarrow x_{\max} = \frac{2v_0^2.\sin\theta.\cos\theta}{g} \quad , \quad \boxed{x_{\max} = \frac{v_0^2.\sin 2\theta}{g}}$$

5/ Le projectile atteint son apogée $z_{\max}$ lorsque la composante verticale v_z de la vitesse s'annule. Cherchons l'instant pour laquelle cette vitesse s'annule et cela à partir de l'équation (2) :

$$v_z = -gt + v_0 \sin\theta = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

Remplaçons maintenant le temps dans l'expression de z de l'équation (4). Nous trouvons :

$$\boxed{z_{\max} = \frac{v_0^2.\sin^2\theta}{2g}}$$

II/ <u>Lancement dans l'air</u> :

1/ Dans cette partie : le projectile est soumis à deux forces : $\boxed{\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}}$

2/ Retrouvons l'équation différentielle :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a} \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}} \rightarrow (5)$$

3/ On en déduit directement l'expression vectorielle de la vitesse instantanée $\vec{v}(t)$ en résolvant l'équation différentielle précédente. Sa solution est:

$$\vec{v} = \vec{A}e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{g}\frac{m}{k}$$

Reste la détermination de la constante $\vec{A}$ que nous allons déduire à partir des conditions initiales qui sont : $t = 0, \vec{v} = \vec{v}_0$; d'où :

$$\vec{v}_0 = \vec{A}e^{-0} + \vec{g}\frac{m}{k} \Rightarrow \boxed{\vec{A} = \vec{v}_0 - \vec{g}\frac{m}{k}}$$

3/ Donc :

$$\boxed{\vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \vec{g}\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{g}\frac{m}{k}} \rightarrow (6)$$

La valeur limite est celle pour laquelle le temps tend vers ∞, on obtient de l'équation (6) : $\boxed{\vec{v}_L = \vec{g}\frac{m}{k}}$

Introduisons cette valeur limite dans l'équation (6) pour obtenir :

$$\boxed{\vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \vec{g}\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{g}\frac{m}{k}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L} \rightarrow (7)$$

Exprimons maintenant le vecteur vitesse en fonction des vecteurs unitaires $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$:

$$\vec{v}_0 = v_0\cos\theta.\vec{u}_x + v_0\sin\theta.\vec{u}_z$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}_L &= \vec{g}\frac{m}{k}\\ \vec{g} &= -g\vec{u}_z\end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{v}_L = -g\frac{m}{k}\vec{u}_z \Rightarrow v_L = -g\frac{m}{k}$$

$$\vec{v} = \left[\left(v_0\cos\theta.\vec{u}_x + v_0\sin\theta.\vec{u}_z\right) + v_L.\vec{u}_z\right]e^{-\frac{k}{m}t} - v_L.\vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{v} = \underbrace{\left(v_0\cos\theta\right)e^{-\frac{k}{m}t}}_{v_x}\vec{u}_x + \left[\underbrace{-v_L + \left(v_0\sin\theta + v_L\right)e^{-\frac{k}{m}t}}_{v_z}\right]\vec{u}_z}$$

4/ Pour obtenir l'expression du vecteur position il suffit d'intégrer l'expression (7) de la vitesse :

$$\left.\begin{aligned}&\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L\\ &\int_{\vec{0}}^{\overrightarrow{OM}} d\overrightarrow{OM} = \int_0^t\left[\left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L\right]dt\\ &\overrightarrow{OM} = \left[\left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)\left(-\frac{k}{m}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L.t\right]_0^t\end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + \vec{v}_L.t} \rightarrow (8)$$

Pour obtenir les composantes de $\overrightarrow{OM}$, nous développons l'équation (8) et puis nous remplaçons $\vec{v}_0$ par ses composantes et $\vec{v}_L$ par sa valeur, comme nous l'avons fait pour l'expression de la vitesse instantanée, et enfin ordonnons l'équation obtenue.

$$\overrightarrow{OM} = \left[\left(v_0\cos\theta.\vec{u}_x + v_0\sin\theta.\vec{u}_z\right) + v_L.\vec{u}_z\right]\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - v_L t.\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{OM} = \left(v_0\cos\theta\right)\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\vec{u}_x + \left[-v_L.t + \left(v_0\sin\theta + v_L\right)\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right]\vec{u}_z$$

On arrive aux composantes :

$$\boxed{x(t)=\frac{m}{k}v_0\cos\theta\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)} \quad , \quad \boxed{z(t)=\frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta+v_L\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)-v_L.t} \rightarrow (9)$$

5/ Le projectile atteint son apogée quand la vitesse verticale s'annule. Cherchons d'abord l'instant pour lequel cette vitesse s'annule :

$$v_z=-v_L+\left(v_0\sin\theta+v_L\right)e^{-\frac{k}{m}t_s}=0$$

$$e^{-\frac{k}{m}t_s}=\frac{v_L}{v_0\sin\theta+v_L}\Rightarrow e^{-\frac{k}{m}t_s}=\frac{v_L}{v_0\sin\theta+v_L}$$

$$\ln e^{-\frac{k}{m}t_s}=\ln\left(\frac{v_L}{v_0\sin\theta+v_L}\right)\Rightarrow\frac{k}{m}t_s=-\ln\left(\frac{v_L}{v_0\sin\theta+v_L}\right)$$

$$\boxed{t_s=\frac{k}{m}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)}$$

Revenons aux deux équations horaires (9) et remplaçons le temps par la valeur que nous venons de trouver :

$$x_s=\frac{m}{k}v_0\cos\theta\left(1-e^{-\frac{k}{m}\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)}\right)$$

$$\boxed{x_s=\frac{m}{k}v_0\cos\theta\left(1-\frac{1}{1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta}\right)}$$

$$z_s=\frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta+v_L\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)}\right)-v_L.\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)$$

$$z_s=\frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta+v_L\right)\left(1-\frac{1}{1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta}\right)-v_L.\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)$$

$$z_s=\frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta+v_L\right)\left(\frac{v_0\sin\theta}{v_L+v_0\sin\theta}\right)-v_L.\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)$$

$$\boxed{z_s=\frac{m}{k}v_0\sin\theta-v_L\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)}$$

$$\boxed{x(t)=\frac{m}{k}v_0\cos\theta\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)} \quad , \quad \boxed{z(t)=\frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta+v_L\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)-v_L.t}=(8)$$

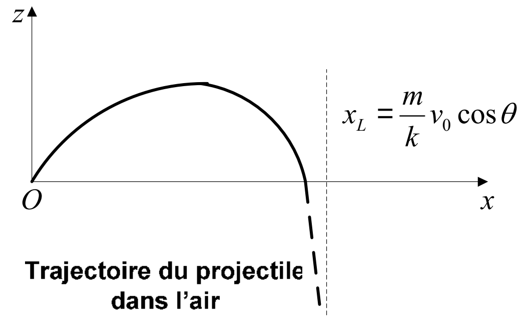
6/ Cherchons dans l'expression (9) les limites de $x(t)$ et $z(t)$ quand $t\rightarrow\infty$:

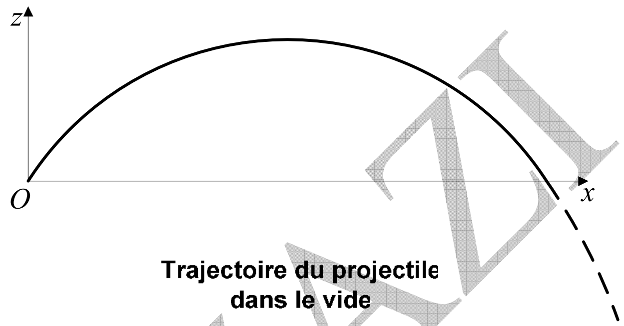
$$x(t)_{t\rightarrow\infty}=\frac{m}{k}v_0\cos\theta=A\Rightarrow x(t)_{t\rightarrow\infty}=A\rightarrow(10)$$

$$z(t)_{t\to\infty} = \underbrace{\frac{m}{k}(v_0 \sin\theta + v_L)}_{B} - v_L.t \Rightarrow z(t)_{t\to\infty} = -v_L.t + B \to (11)$$

On en déduit de l'équation (11) que lorsque $t \to \infty$ le mouvement du projectile devient rectiligne uniforme, donc la trajectoire a une asymptote quand $t \to \infty$ dont l'équation est (10) .

III. **Synthèse graphique** : les deux graphes montrent la trajectoire dans les deux cas considérés.





Exercice 5.10 :

1/Le mouvement en présence de frottement :

La particule est soumise à trois forces, son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{N}$ de la surface de la sphère sur la particule et la force de frottement $\vec{f}$. A partir de la figure (a) ci-dessous, et en appliquant a relation fondamentale de la dynamique nous pouvons écrire :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}$$

Projetons les forces sur les deux axes MT et MN :

$$P_T - f = ma_T = m\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow mg\sin\theta - f = m\frac{dv}{dt} \to (1)$$

$$-N + P_N = ma_N = m\frac{v^2}{R} \Leftrightarrow -N + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \to (2)$$

L'expression de la force de frottement cinétique est :

$$\left.\begin{array}{l} f = \mu N \\ N = mg\cos\theta - m\dfrac{v^2}{R} \end{array}\right| \Rightarrow f = \mu\left(mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}\right)$$

Remplaçons dans l'équation (1) pour obtenir l'équation différentielle du mouvement :

$$mg\sin\theta - \mu\left(mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}\right) = m\frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} - \frac{\mu}{R}v^2 = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}$$

2/ **Mouvement sans frottement** :

a/ Revenons à l'équation (1) en supprimant f et en simplifiant par la masse :

$$\frac{dv}{dt} - g\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

On multiplie les deux membres par $d\theta$, sachant que $\frac{d\theta}{dt}=\omega=\frac{v}{R}$:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d\theta}{dt}dv=g\sin\theta.d\theta\\ \frac{d\theta}{dt}=\omega=\frac{v}{R}\end{array}\right|\Rightarrow vdv=gR\sin\theta.d\theta\rightarrow(3)$$

Intégrons les deux membres de l'équation (3) sachant que le domaine de variation de θ est $[0,\theta]$, celui de v est $[0,v]$:

$$\int_0^v vdv=gR\int_0^\theta\sin\theta.d\theta\Rightarrow\frac{1}{2}v^2-0=-Rg(\cos\theta-\cos 0)$$

On obtient finalement :

$$v^2=2Rg(1-\cos\theta)\Rightarrow\boxed{v=\sqrt{2Rg(1-\cos\theta)}}\rightarrow(4)$$

b/ Recherche de la valeur angulaire θ_0 pour laquelle la particule quitte la surface de la sphère : cela se produit lorsque la force de réaction $\vec{N}$ s'annule.

Revenons à l'équation (2) et calculons N :

$$-N+mg\cos\theta=m\frac{v^2}{R}\Rightarrow N=mg\cos\theta-m\frac{v^2}{R}$$

On remplace v^2 par sa valeur pour aboutir à :

$$N=mg\cos\theta-m\frac{2Rg(1-\cos\theta)}{R}\Rightarrow\boxed{N=mg(3\cos\theta-2)}$$

D'où l'angle recherché est :

$$mg(3\cos\theta_0-2)=0\Rightarrow\cos\theta_0=2/3\Rightarrow\boxed{\theta_0=48°}$$

Discussion : D'après l'expression obtenue, l'angle θ_0 ne dépend ni de la masse de la particule, ni du rayon de la sphère, ni de l'accélération de pesanteur, *avec pour condition* $v(0)$ *nulle*.

N.B : Si $v_0\neq v(0)$ v_0 étant la vitesse avec laquelle la particule quitte la surface de la sphère.

$v(0)$: La vitesse absolue.

Dans le cas où la vitesse initiale n'est pas nulle, on peut démontrer que :

$$\boxed{\cos\theta_0=\frac{2}{3}+\frac{v(0)^2}{3Rg}}$$

Dans ce cas l'angle θ_0 dépend de $v(0)$, R et g mais reste indépendant de m .

c/ Calcul de la vitesse correspondante :

$$\left.\begin{array}{l}v_0^2=2Rg(1-\cos\theta_0)\\ \cos\theta_0=2/3\end{array}\right|\Rightarrow v_0=\sqrt{2Rg(1-2/3)}\ ,\ \boxed{v_0=3,65ms^{-1}}$$

3/ Etude du mouvement lorsque la particule quitte la surface de la sphère.

Nous sommes en présence du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur terrestre.

a/ On étudie le mouvement dans le repère MXY (figure(b)).

Suivant l'axe des X : le mouvement est rectiligne uniforme :

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow v_x = v_0.\cos\theta_0 \rightarrow (5)$$

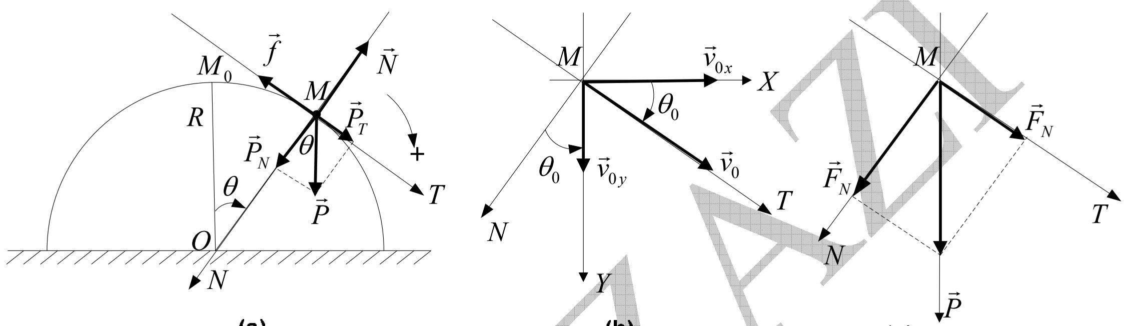
Suivant l'axe des Y : le mouvement est rectiligne uniformément varié :

$$\sum \vec{F}_y = \vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow a_y = g = Cte$$

$$v_y = gt + v_0 \sin\theta_0 \rightarrow (6)$$

Passons à l'expression de la vitesse instantanée du projectile :

$$\left.\begin{array}{l} v^2 = v_x^2 + v_y^2 \\ v_0^2 = 2Rg\left(1-\cos\theta_0\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0.t + 2Rg\left(1-\cos\theta_0\right)}}$$



(a) (b) (c)

L'expression du vecteur vitesse est donc : $\boxed{\vec{v} = v_0.\cos\theta_0.\vec{i} + \left(gt + v_0 \sin\theta_0\right)\vec{j}}$

b/ Intensités des forces normale et tangentielle : figure (c).

Force tangentielle:

$$F_T = m.a_T = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{F_T = \frac{mg\left(gt + v_0 \sin\theta_0\right)}{\sqrt{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0.t + v_0^2}}}$$

Force normale : Il n'est pas conseillé d'appliquer la formule $F_N = m\frac{v^2}{r}$ car le rayon de courbure est inconnu, à ne pas confondre avec le rayon R de la sphère !!

Cette force est calculée à partir de la relation : $\vec{P} = \vec{F}_N + \vec{F}_T \Rightarrow \boxed{F_N = \sqrt{P^2 - F_T^2}}$

D'où :

$$\boxed{F_N = mg\sqrt{1 - \frac{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0.t + v_0^2 \sin^2\theta_0}{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0.t + v_0^2}}}$$

Exercice 5.11 :

a/ Intensité du champ de pesanteur terrestre quand le satellite est à mi-chemin entre la terre et la lune :

$$\boxed{g_T = G\frac{M_T}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}} \quad , \quad g_T = 6,67.10^{-11}\frac{5,98.10^{24}}{\left(1,92.10^8\right)^2} \Rightarrow \boxed{g_T = 1,08.10^{-2}\,N.kg^{-1}}$$

b/ Intensité du champ de pesanteur lunaire quand le satellite est à mi-chemin entre la terre et la lune :

$$\boxed{g_L = G\frac{M_L}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}} \quad , \quad g_L = 6,67.10^{-11}\frac{7,36.10^{22}}{\left(1,92.10^{8}\right)^2} \Rightarrow \boxed{g_L = 1,33.10^{-4}\, N.kg^{-1}}$$

c/ Intensité du champ résultant des champs de pesanteur de la terre et de la lune lorsque le satellite est à mi-chemin entre la terre et la lune :

$$\boxed{g_R = g_T - g_L} \quad , \quad \boxed{g_R = 1,07.10^{-2}\, N.kg^{-1}}$$

d/ La distance, depuis le centre de la terre, à laquelle le champ résultant s'annule :

$$g_R = 0 \Rightarrow g_L = g_T \quad , \quad G\frac{M_L}{(d-r)^2} = G\frac{M_T}{r^2} \Rightarrow \frac{M_L}{(d-r)^2} = \frac{M_T}{r^2}$$

$$\frac{r^2}{(d-r)^2} = \frac{M_T}{M_L} \Rightarrow \frac{r^2}{(d-r)^2} = 81,25$$

$$\frac{r}{d-r} = 9,01 \Rightarrow r = 3,45.10^8\, m \to \boxed{r = 345000 km}$$

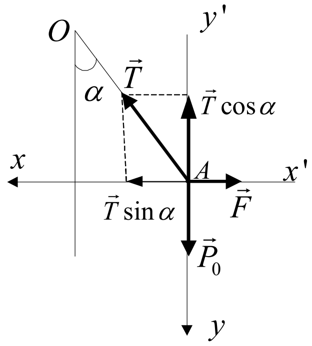
Exercice 5.12 :

Nous avons représenté sur la figure ci-dessous les forces agissant sur le point A . En projetant sur les deux axes perpendiculaires entre eux, nous obtenons à l'état d'équilibre :

$$\left.\begin{array}{l} P_0 = T\cos\alpha \\ P_0 = kl_0 \\ T = kl_1 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{l_1 = \frac{l_0}{\cos\alpha}}$$

$$F = T\sin\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} F = kl_2 = T\sin\alpha \\ T = \dfrac{P_0}{\cos\alpha} = \dfrac{kl_0}{\cos\alpha} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{kl_0}{\cos\alpha}\sin\alpha = kl_2 \Rightarrow \boxed{l_2 = l_0 tg\alpha}$$



Exercice 5.13 :

a/ Force agissant sur le corps :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = 6\left(6\vec{i} - 24t.\vec{j}\right) \quad , \quad \boxed{\vec{F} = 36\vec{i} - 144t.\vec{j}}$$

b/ Moment de la force par rapport à l'origine :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 - 6t & -4t^3 & 3t+2 \\ 36 & -144t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \left(432t^2 + 288t\right)\vec{i} + \left(108t + 72\right)\vec{j} + \left(-288t^3 + 864t^2\right)\vec{k}}$$

c/ Quantité de mouvement du corps :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \left(36t - 36\right)\vec{i} - 72t^2.\vec{j} + 18\vec{k}}$$

Moment cinétique par rapport à l'origine :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 - 6t & -4t^3 & 3t+2 \\ 36t-36 & -72t & 18 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{L} = \left(144t^3 + 144t^2\right)\vec{i} + \left(54t^2 + 72t + 72\right)\vec{j} + \left(72t^4 + 288t^3\right)\vec{k}}$$

d/ Vérifions que $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$:

$$\vec{p} = \left(36t - 36\right)\vec{i} - 72t^2.\vec{j} + 18\vec{k}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = 36\vec{i} - 144t.\vec{j} = \vec{F}}$$

Vérifions que $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$:

$$\vec{L} = \left(144t^3 + 144t^2\right)\vec{i} + \left(54t^2 + 72t + 72\right)\vec{j} + \left(72t^4 + 288t^3\right)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \left(432t^2 + 288t\right)\vec{i} + \left(108t + 72\right)\vec{j} + \left(-288t^3 + 864t^2\right)\vec{k} = \vec{\tau}}$$

<u>Exercice 5.14 </u>:

1/ Exprimons la vitesse de M par rapport à R :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = l\vec{u}_r$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \dot{\vec{r}} = l\dot{\vec{u}}_r \\ \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

2/ Calculons le moment cinétique du point M par rapport à O dans la base $\left(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \\ \vec{p} = m\vec{v}_r + m\vec{v}_\theta \\ \vec{v}_r = \dot{l}.\vec{u}_r = 0\left(l = Cte\right) \\ \vec{v}_\theta = l\dot{\theta}.\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \vec{L}_O = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ r = l & 0 & 0 \\ 0 & ml\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} \;;\; \boxed{\vec{L}_O = ml^2\dot{\theta}.\vec{u}_z}$$

Pour que l'on puisse appliquer le théorème du moment cinétique il faut calculer le moment de la force appliquée au point M , par rapport au point O dans la base $\left(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\tau}_O = \left(\underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}}_{\vec{0}}\right) + \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\right) \\ \vec{P} = \vec{P}_r + \vec{P}_\theta \\ \vec{P}_r = mg\cos\theta.\vec{u}_r \\ \vec{P}_\theta = -mg\sin\theta.\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \vec{\tau}_O = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ l & 0 & 0 \\ mg\cos\theta & -mg\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\tau}_O = -mgl\sin\theta.\vec{u}_z}$$

Appliquons maintenant le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_0 \;;\; ml^2\ddot{\theta}.\vec{u}_z = -mgl\sin\theta.\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0} \rightarrow (1)$$

On calcule le moment cinétique du point M par rapport au point O dans la base $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_O=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}\\ \vec{p}=m\vec{v}_x+m\vec{v}_y\end{array}\right|\Rightarrow \vec{L}_O=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ x & y & 0\\ \dot{x} & \dot{y} & 0\end{vmatrix}\ ;\ \boxed{\vec{L}_O=m\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)\vec{k}}$$

On calcule le moment de la force appliquée au point M par rapport au point O dans la base $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\tau}_O=\left(\underbrace{\overrightarrow{OM}\wedge\vec{T}}_{0}\right)+\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}\right)\\ \vec{P}=\underbrace{\vec{P}_x}_{0}+\vec{P}_y=mg.\vec{j}\end{array}\right|\Rightarrow \vec{\tau}_O=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ x & y & 0\\ 0 & mg & 0\end{vmatrix}\ ;\ \boxed{\vec{\tau}_O=mgx.\vec{k}}$$

Appliquons le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{\tau}_0\ ;\ m\left(\dot{x}\dot{y}+x\ddot{y}-\dot{x}\dot{y}-y\ddot{x}\right)\vec{k}=mgx.\vec{k}\Rightarrow \boxed{x\ddot{y}-y\ddot{x}=gx}\rightarrow(2)$$

Vérifions que les deux résultats sont identiques :

$$x=l\sin\theta\ ;\ \dot{x}=l\dot{\theta}\cos\theta\ ;\ \ddot{x}=l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta$$

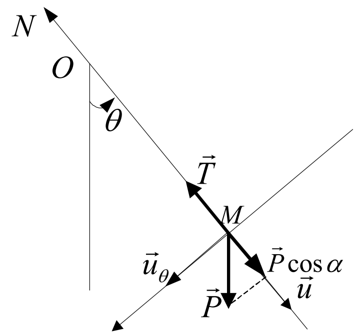
$$y=l\cos\theta\ ;\ \dot{y}=-l\dot{\theta}\sin\theta\ ;\ \ddot{y}=-l\ddot{\theta}\sin\theta-l\dot{\theta}^2\cos\theta$$

Remplaçons les cinq éléments dans l'équation (2) pour trouver l'équation (1) :

$$\boxed{\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0}\rightarrow(3)$$

Appliquons maintenant la relation fondamentale de la dynamique :

La masse m est soumise à chaque instant à deux forces : son poids $\vec{P}$ et la tension $\vec{T}$ du fil ; Soit $\vec{F}$ leur résultante. Nous pouvons décomposer la résultante en deux composantes, normale et tangentielle (voir figure).



$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}=\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}\\ \vec{F}=\vec{F}_T+\vec{F}_N=m\vec{a}\end{array}\right|\Rightarrow \vec{P}+\vec{T}=\vec{F}_T+\vec{F}_N$$

On connaît la relation entre la vitesse linéaire et la vitesse angulaire ainsi que la relation entre l'accélération linéaire et l'accélération angulaire :

$$v=\dot{\theta}l\ ,\ a_T=\frac{dv}{dt}=\ddot{\theta}l\ ,\ a_N=\frac{v^2}{l}=\dot{\theta}^2l$$

Puisqu'on est dans le cas d'un mouvement de rotation de la masse m, il nous est permis d'introduire le moment de la force par rapport à l'axe OZ . Les moments des forces $\vec{F}_N$ et $\vec{T}$ sont nuls parce que ces forces rencontrent l'axe de rotation. Le moment du poids est un moment de rappel, donc négatif.

$$\left.\begin{array}{l}\tau=\tau_{\vec{P}}+\tau_{\vec{T}}=\tau_{\vec{F}_T}+\tau_{\vec{F}_N}\\ \tau_{\vec{T}}=\tau_{\vec{F}_N}=0\\ \tau_{\vec{P}}=-P.l\sin\theta\\ \tau_{\vec{F}_T}=F_T.l=m\ddot{\theta}l^2\end{array}\right|\Rightarrow -mgl\sin\theta=m\ddot{\theta}l^2$$

De tout cela on déduit l'équation de mouvement :

$$\boxed{\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0}\rightarrow(4)$$

Les équations (1) et (4) obtenues sont parfaitement identiques.

3/ A chaque instant, nous avons $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$. En projetant sur l'axe normal, nous obtenons :

$$-mg\cos\theta+T=ma_N\Rightarrow T=mg\cos\theta+m\dot{\theta}^2l$$

Remarquons que la tension varie à chaque instant. Pour des oscillations de très faible amplitude $(\sin\theta\approx\theta)$, l'équation différentielle (1) s'écrit sous la forme :

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$

Sa solution est :

$$\theta=\theta_0\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Donc, la vitesse angulaire est :

$$\dot{\theta}=\theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Lors du passage du pendule par la position d'équilibre, l'angle θ s'annule :

$$\theta=0\Rightarrow\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t=0\Rightarrow\sqrt{\frac{g}{l}}t=0\pm k\pi$$

A ce moment la vitesse est maximale :

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\theta}=\theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}\cos(0\pm k\pi)\\ \cos(0\pm k\pi)=\pm1\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{|\dot{\theta}|=\theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Il en est de même pour la tension qui prend la valeur :

$$\boxed{T=m\left(g+\theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}\right)}$$

C'est cette condition sur la tension qui doit être satisfaite pour que le fil ne casse pas, en d'autres termes le fil doit supporter au moins cette tension sans se rompre.

<u>Exercice 5.15 :</u>

Le moment cinétique du système est égal à la somme des moments cinétiques de tous les composants partiels du système. Dans notre cas, le moment cinétique du système par rapport au point O est égal au moment $\left(\vec{L}_{O/G}\right)$ du point G (qui est le centre d'inertie des deux masses) par rapport à O, plus les moments des points A $\left(\vec{L}_{A/G}\right)$ et B $\left(\vec{L}_{B/G}\right)$ par rapport à G.

$$\vec{L}_O=\vec{L}_{G/O}+\vec{L}_{A/G}+\vec{L}_{B/G}$$

Commençons par le calcul de $\left(\vec{L}_{O/G}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_{G/O}=\overrightarrow{OG}\wedge\vec{p}_{G/O}\\ \vec{p}_{G/O}=2m\vec{v}_{G/O}\end{array}\right|\Rightarrow\vec{L}_{G/O}=2m\left(\overrightarrow{OG}\wedge\vec{v}_{G/O}\right)$$

$$\vec{L}_{G/O} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x_G = a\cos\theta_1 & y_G = a\sin\theta_1 & 0 \\ \dot{x}_G = -a\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 & \dot{y}_G = a\dot{\theta}_1\cos\theta_1 & 0 \end{vmatrix} = \left(x_G\dot{y}_G - \dot{x}_G y_G\right)$$

$$\boxed{\vec{L}_{G/O} = 2ma^2\dot{\theta}_1^2} \rightarrow (1)$$

Calculons ensuite $\left(\vec{L}_{A/G} = \vec{L}_{B/G}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{L}_{A/G} = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{p}_{A/G} \\ \vec{p}_{A/G} = m\vec{v}_{A/G} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{L}_{A/G} = m\left(\overrightarrow{GA} \wedge \vec{v}_{A/G}\right)$$

$$\vec{L}_{O/G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x'_A = d\cos\theta_2 & y'_A = d\sin\theta_2 & 0 \\ \dot{x}'_A = -d\dot{\theta}_2\sin\theta_2 & \dot{y}'_A = d\dot{\theta}_2\cos\theta_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(x'_A\dot{y}'_A - \dot{x}'_A y'_A\right)$$

$$\boxed{\vec{L}_{A/G} = md^2\dot{\theta}_2^2 = \vec{L}_{B/G}} \rightarrow (2)$$

Il ne nous reste qu'à additionner les expressions (1) et (2) pour trouver la réponse à la question :

$$\vec{L}_O = 2ma^2\dot{\theta}_1^2 + 2md^2\dot{\theta}_2^2 \quad , \quad \boxed{\vec{L}_O = 2m\left(a^2\dot{\theta}_1^2 + d^2\dot{\theta}_2^2\right)}$$

Exercice 5.16 :

1/ Le point M , soumis à chaque instant à son poids et à la tension du fil, est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon , dans le plan OXY ,autour de l'axe AZ . Des projections des deux forces sur l'axe radial résulte une force centripète $T\sin\alpha$.

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\left.\begin{array}{l} T\sin\alpha = ma_N = m\omega^2 r \\ r = l\sin\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{T = m\omega^2 l}$$

Quant à l'angle il est déterminé à l'aide de la figure ci-dessous, nous trouvons :

$$tg\alpha = \frac{T\sin\alpha}{mg} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{m\omega^2 l\sin\alpha}{mg}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}}$$

2/ Calcul de l'expression du moment cinétique de M par rapport à A en coordonnées cylindriques de centre O :

$$\vec{L}_{M/A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = -z\vec{u}_z + r\vec{u}_r$$

$$\overrightarrow{AM} = -l\cos\alpha.\vec{u}_z + l\sin\alpha.\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \underbrace{-\dot{z}\vec{u}_z + z\dot{\vec{u}}_z + \dot{r}\vec{u}_r}_{\vec{0}} + r\dot{\vec{u}}_r = r\omega\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \vec{v}_\theta = l\omega\sin\alpha.\vec{u}_\theta$$

$$\vec{p} = ml\omega\sin\alpha.\vec{u}_\theta$$

$$\vec{L}_{M/A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ l\sin\alpha & 0 & -l\cos\alpha \\ 0 & ml\omega\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_{M/A} = ml^2\omega\sin\alpha\left(\cos\alpha.\vec{u}_r + \sin\alpha.\vec{u}_z\right)}$$

Vérifions que la dérivée par rapport au temps est égale au moment de la résultante des forces appliquées sur A, par rapport à M :

Calculons en premier lieu le moment des forces par rapport au point A : $\vec{\tau}_{M/A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$

Le vecteur $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

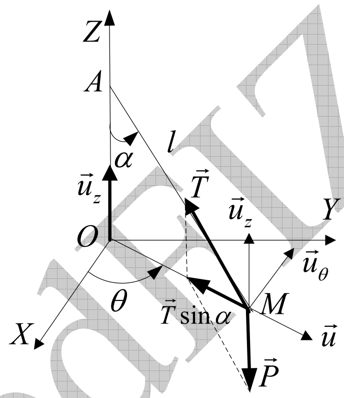
$$\vec{F} = T\sin\alpha = ma_N = m\omega^2 r$$

$$\boxed{\vec{F} = m\omega^2 l\sin\alpha.\vec{u}_r}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM} = -z\vec{u}_z + r\vec{u}_r$$

$$\vec{F} = m\omega^2 l\sin\alpha.\vec{u}$$



Donc :

$$\vec{\tau}_{M/A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ l\sin\alpha & 0 & -l\cos\alpha \\ m\omega^2 l\sin\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{M/A} = ml^2\omega^2\sin\alpha.\vec{u}_\theta} \rightarrow (1)$$

Dérivons le moment cinétique par rapport au temps :

$$\vec{L}_{M/A} = ml^2\omega\sin\alpha\left(\cos\alpha.\vec{u}_r + \sin\alpha.\vec{u}_z\right)$$

$$\frac{d\vec{L}_{M/A}}{dt} = ml^2\omega\sin\alpha\left(\cos\alpha.\dot{\vec{u}}_r + 0\right)$$

Nous savons que $\dot{\vec{u}}_r = \omega.\vec{u}_r$, et par remplacement on obtient :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{M/A}}{dt} = ml^2\omega^2\sin\alpha.\cos\alpha.\vec{u}_\theta} \rightarrow (2)$$

Ainsi nous avons pu vérifier le théorème du moment cinétique :

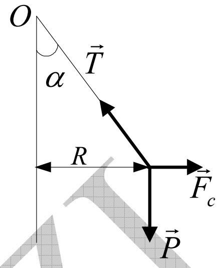
$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{M/A}}{dt} = \vec{\tau}_{M/A}}$$

Exercice 5.17 :

1/ Le train en abordant un virage circulaire, son mouvement devient circulaire vers la gauche, car la force centrifuge attire le pendule vers la droite.

2/ Sur la figure ci contre sont représentées les forces qui agissent sur le pendule par rapport au voyageur. De l'équilibre de ces forces résulte :

$$\vec{P}+\vec{F}_c+\vec{T}=\vec{0}\Rightarrow \vec{P}+\vec{F}_c=-\vec{T}$$



$$tg\alpha=\frac{F_c}{P}\Rightarrow tg\alpha=\frac{m\dfrac{v^2}{R}}{mg}\Rightarrow \boxed{R=\frac{v^2}{g.tg\alpha}}$$

Application numérique :

$$R=\frac{\left(\dfrac{120.10^3}{3600}\right)^2}{9.8\times 0,176}\Rightarrow \boxed{R=631N}$$

3/ Le train parcourt en trente secondes un arc de cercle qui intercepte l'angle demandé.

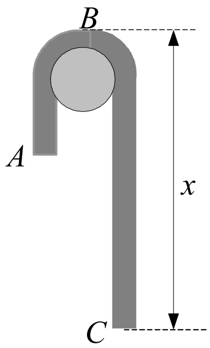
La distance parcourue en $30s$ est: $d=vt$, $d=1000m$

Cela veut dire que le train a tourné de l'angle :

$$d=R\theta\Rightarrow \boxed{\theta=\frac{d}{R}}\ ,\ \theta\approx 1,59rad\ ,\ \boxed{\theta\approx 91°}$$

Exercice 5.18 :

A l'instant t, soit $\vec{P}_1$ le poids de la partie BC et $\vec{P}_2$ le poids de la partie AB :



Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au système :

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=\Big(\underbrace{M_1+M_2}_{M}\Big)\vec{a}$$

On projette l'expression vectorielle sur l'axe vertical dirigé vers le bas et on note par x la longueur de la partie BC du câble :

$$\left.\begin{array}{l} P_1-P_2=Ma \\ M=\lambda L \\ P_1=M_1g=\lambda xg \\ P_2=M_2g=\lambda\left(L-x\right)g \end{array}\right|\Rightarrow \lambda xg-\lambda\left(L-x\right)g=\lambda L\frac{dv}{dt}$$

En simplifions par λ nous obtenons une équation différentielle de deuxième ordre avec second membre :

$$\left.\begin{array}{l} 2gx-gL=L\dfrac{dv}{dt} \\ a=\dfrac{dv}{dt}=\ddot{x} \end{array}\right|\Rightarrow L\ddot{x}=2gx-gL\Rightarrow \boxed{\ddot{x}-\frac{2g}{L}x=-g}$$

Pour vérifier que $x=\dfrac{2}{3}L\to a=\dfrac{g}{3}$, on remplace dans l'équation différentielle x par la valeur proposée, soit :

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}-\dfrac{2g}{L}x=-g \\ x=\dfrac{2}{3}L \end{array}\right| \Rightarrow \ddot{x}=a=\frac{4g}{3}-g \Rightarrow \boxed{a=\frac{g}{3}}$$

Cherchons à présent le résultat relatif à la vitesse. L'équation caractéristique de cette équation différentielle de deuxième ordre sans le second membre est : $r^2-\dfrac{2g}{L}=0$

Ses deux racines sont : $r_1=+\sqrt{\dfrac{2g}{L}}$; $r_1=-\sqrt{\dfrac{2g}{L}}$

Sa solution est donc : $\boxed{x=Ae^{\sqrt{\frac{2g}{L}}t}+Be^{-\sqrt{\frac{2g}{L}}t}+\dfrac{L}{2}} \rightarrow (1)$

Reste à déterminer les deux constantes A et B . C'est ce qu'on en déduit des conditions initiales et qui sont : $t=0\left|\begin{array}{l} x=b \\ v=\dot{x}=0 \end{array}\right.$

L'expression de la vitesse est : $\boxed{v=\dot{x}=A\sqrt{\dfrac{2g}{L}}e^{\sqrt{\frac{2g}{L}}t}-B\sqrt{\dfrac{2g}{L}}e^{-\sqrt{\frac{2g}{L}}t}} \rightarrow (2)$

Remplaçons par les conditions initiales dans les deux équations (1) et (2) pour tirer A et B :

$$\left.\begin{array}{l} b=A+B+\dfrac{L}{2} \\ 0=A\sqrt{\dfrac{2g}{L}}-B\sqrt{\dfrac{2g}{L}} \Rightarrow A=B \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{A=B=\frac{b}{2}-\frac{L}{4}}$$

Afin de simplifier les calculs, on pose $\omega=\sqrt{\dfrac{2g}{L}}$. On doit connaître en trigonométrie les définitions et les formules particulières du sinus hyperbolique (sh) et du cosinus hyperbolique (ch), en particulier :

$$sh\omega t=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2} \quad ; \quad \mathrm{ch}\omega t=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \quad ; \quad \mathrm{c}h^2\omega t-sh^2\omega t=1$$

Ecrivons les deux équations (1) et (2) sous la forme :

$$x=2.\frac{2b-L}{4}\left(\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right)+\frac{L}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2b-L}{2}ch\omega t+\frac{L}{2} \rightarrow (3)$$

$$v=\dot{x}=2.\frac{2b-L}{4}\omega\left(\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right) \Leftrightarrow v=\dot{x}=\frac{2b-L}{2}\omega sh\omega t \rightarrow (4)$$

Puisque $x=\dfrac{2}{3}L$, remplaçons dans l'équation (3) et tirons de l'équation l'expression du cosinus hyperbolique (3) :

$$\frac{2}{3}L=2\frac{2b-L}{4}ch\omega t+\frac{L}{2} \Rightarrow \boxed{ch\omega t=\frac{L}{6b-3L}} \rightarrow (5)$$

De l'équation (4) on tire le sinus hyperbolique :

$$v=\dot{x}=\frac{2b-L}{2}\omega sh\omega t\Rightarrow \boxed{sh\omega t=\frac{2v}{\omega\left(4b^2+L^2-4bL\right)}}\rightarrow(6)$$

Nous savons que $ch^2\omega t-sh^2\omega t=1$. Sommons les équations (5) et (6) membre à membre après les avoir élevées au carré :

$$\left.\begin{array}{l} ch^2\omega t=\left(\dfrac{L}{6b-3L}\right)^2 \\ sh^2\omega t=\left(\dfrac{2v}{\omega\left(4b^2+L^2-4bL\right)}\right)^2 \\ ch^2\omega t-sh^2\omega t=1 \end{array}\right|\Rightarrow v^2=\omega^2\left(-b^2+bL-\frac{2}{9}L^2\right)$$

Revenons en arrière et remplaçons ω par sa valeur pour obtenir à la fin la valeur que nous devons vérifier :

$$\boxed{v=\sqrt{\frac{2g}{L}\left(-b^2+bL-\frac{2}{9}L^2\right)}}$$

Application numérique : $L=12m$ et $b=7m$

$$\boxed{v\approx 10,6ms^{-1}}$$

<u>Autre méthode</u> : beaucoup plus simple !!

A partir de l'équation $\ddot{x}-\frac{2g}{L}x=-g$, et par une intégration on trouve la fonction $v=f(x)$:

$$\ddot{x}-\frac{2g}{L}x=-g\Rightarrow\frac{dv}{dt}=\frac{2g}{L}x-g\Rightarrow\frac{dv}{dt}dx=\left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx$$

$$\frac{dx}{dt}dv=\left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx\Rightarrow v.dv=\left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx$$

$$\int_0^v v.dv=\int_b^x\left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx\Rightarrow\frac{1}{2}v^2=\frac{g}{L}x^2-gx\Rightarrow\boxed{v^2=2\frac{g}{L}x^2-2gx-2\frac{g}{L}b^2+2gb}$$

Il ne reste plus qu'à retrouver le résultat précédent en remplaçant x par $\frac{2}{3}L$. A la fin on retrouve le même résultat :

$$\boxed{v=\sqrt{\frac{2g}{L}\left(-b^2+bL-\frac{2}{9}L^2\right)}}$$

<u>Exercice 5.19</u> :

1/ Quelque soit la position du point M sur la surface conique, l'angle à chaque instant est $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{Oz}\right)=\alpha$, et par conséquent $\tan\alpha=\frac{r}{z}=\frac{r_0}{z_0}\Rightarrow\boxed{z=r\frac{r_0}{z_0}}$

2/ D'après le cours, nous savons que l'accélération du point M en coordonnées cylindriques est :

$$\vec{a} = \Big(\underbrace{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2}_{a_r}\Big)\vec{u}_r + \Big(\underbrace{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}}_{a_\theta}\Big)\vec{u}_\theta + \underbrace{\ddot{z}}_{a_z}\vec{u}$$

Si le point reste sur la surface du cône : $\ddot{z} = \ddot{r}\dfrac{r_0}{z_0}$. Les forces agissant sur le point matériel sont son poids $\vec{P}$, à composante unique $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$, et la force de réaction $\vec{R}$ de la surface qui a deux composantes $\vec{R} = \vec{R}_r + \vec{R}_z = -R\cos\alpha.\vec{u}_r + R\sin\alpha.\vec{u}_z$.

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique, puis projetons les deux forces sur les trois axes du repère cylindrique. Nous obtenons :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} = \vec{F}$$

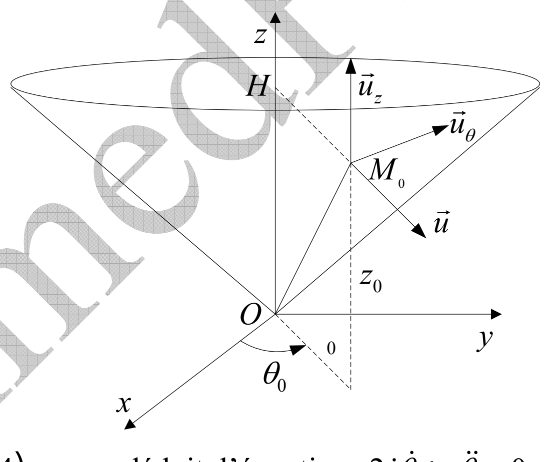
$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_\theta + \vec{F}_z = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + m\ddot{z}\vec{u}_z \rightarrow (1)$$

$$\vec{F} = -R\cos\alpha.\vec{u}_r + R\sin\alpha.\vec{u}_z - mg\vec{u}_z$$

$$\vec{F} = -R\cos\alpha.\vec{u}_r + \left(R\sin\alpha - mg\right)\vec{u}_z \rightarrow (2)$$

Par identification des deux équations (1) et (2) on obtient trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} -R\cos\alpha = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \rightarrow (3) \\ 0 = m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) \rightarrow (4) \\ -mg + R\sin\alpha = m\dfrac{z_0}{r_0}\ddot{r} \rightarrow (5) \end{cases}$$



3/ De l'équation (4) on en déduit l'équation $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$, qui est la dérivée de la quantité $r^2\dot{\theta}$ par rapport au temps. Ceci nous conduit à $r^2\theta = C^{te}$:

$$\left(r^2\dot{\theta}\right)' = 2\dot{r}r.\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow r^2\dot{\theta} = C^{te}$$

Nous connaissons l'expression de la vitesse linéaire en coordonnées cylindriques à partir de laquelle nous déduisons la vitesse initiale :

$$v(t) = \dot{r}(t)\vec{u}_r + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta + \dot{z}(t)\vec{u}_r \Rightarrow v(0) = \dot{r}(0)\vec{u}_r + r(0)\dot{\theta}(0)\vec{u}_\theta + \dot{z}(0)\vec{u}_r$$

L'intensité de la vitesse initiale est donc:

$$v(0) = \sqrt{\left[\dot{r}(0)\right]^2 + \left[r(0)\dot{\theta}(0)\right]^2 + \left[\dot{z}(0)\right]^2}$$

L'énoncé nous impose l'expression de $\dot{\theta}$ sans $\dot{r}(0)$ ni $\dot{z}(0)$. Ceci n'est possible que sous des conditions initiales de la forme $\dot{r}(0)=\dot{z}(0)=0$. C'est ce que nous admettons dans le reste de l'exercice. Partant de là, la vitesse initiale est :

$$v(0)=r(0)\dot{\theta}(0)$$

Suite à tout cela, nous pouvons poursuivre notre étude tel que :

$$r^2\dot{\theta}=C^{te}\Rightarrow r(t)^2\,\dot{\theta}(t)=r(0)^2\,\dot{\theta}(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\theta}(t)=\dfrac{r(0).r(0).\dot{\theta}(0)}{r(t)^2} \\ v(0)=r(0).\dot{\theta}(0) \\ v(0)=v_0\ \ ,\ r(0)=r_0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}=\frac{r_0v_0}{r^2}}$$

4/ L'équation (5) fait l'objet de cette question car elle renferme une fonction unique $r(t)$, contrairement aux équations (3) et (4) qui sont fonctions de $r(t)$ et $\theta(t)$ en même temps. De l'équation (3) nous pouvons écrire :

$$R=\frac{1}{\sin\alpha}\left[mg+m\frac{z_0}{r_0}\ddot{r}\right]$$

Remplaçons R par cette dernière expression dans l'équation (3) pour obtenir :

$$\ddot{r}-\underbrace{\frac{v_0^2r_0^4}{r_0^2+z_0^2}}_{A(r_0,v_0,z_0)}.\frac{1}{r^3}=-\underbrace{\frac{z_0r_0}{r_0^2+z_0^2}g}_{A(r_0,z_0,g)}\rightarrow(6)$$

5/ Si le mouvement est circulaire uniforme cela veut dire qu'à chaque instant $r(t)=r(0)$, en même temps que $\left(\dot{\theta}(t)=C^{te}\right)$. L'expression (4) devient :

$$\frac{v_1^2r_0^4}{r_0^2+z_0^2}.\frac{1}{r_0^3}=\frac{z_0r_0}{r_0^2+z_0^2}g\Rightarrow\frac{v_1^2}{r_0^2+z_0^2}=\frac{z_0}{r_0^2+z_0^2}g$$

La vitesse demandée est donc : $\boxed{v_1=\sqrt{2gz_0}}$

6/ Multiplions l'équation (6) par $2\,\dot{}$ pour obtenir : $2\dot{r}\ddot{r}+A\dfrac{2\dot{r}}{r^3}=2B\dot{r}$

La première intégration donne : $\int 2\dot{r}\ddot{r}d\dot{r}+\int A\dfrac{2\dot{r}}{r^3}d\dot{r}=\int 2B\dot{r}d\dot{r}\Rightarrow\dot{r}^2-\dfrac{A}{r^2}=2Br+C\rightarrow(7)$

Pour obtenir la constante C on doit revenir aux conditions initiales citées plus haut $\left[t=0,\dot{r}(0)=0\right]$:

$$0-\frac{A}{r^2}=2Br+C\Rightarrow\boxed{C=-\frac{A}{r^2}-2Br}$$

L'équation (7) devient finalement :

$$\boxed{\dot{r}^2=2A\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_0^2}\right)+2B(r-r_0)}$$

Exercice 5.20 :

Nous utilisons la notation de Newton pour exprimer les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération :

$$\vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{a}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Calculons l'expression de la force :

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B\dot{z} \\ -B\dot{y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) = q\left(E\vec{k} + 0\vec{i} + B\dot{z}\vec{j} - B\dot{y}\vec{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = q\left[0\vec{i} + B\dot{z}\vec{j} + \left(E - B\dot{y}\right)\vec{k}\right]} \to (1)$$

En appliquons la relation fondamentale de la dynamique on peut écrire :

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\ddot{x} + m\ddot{y} + m\ddot{z}} \to (2)$$

L'identification des deux équations (1) et (2) nous donne trois équations différentielles :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = qB\dot{z} \\ m\ddot{z} = -q\left(E + B\dot{y}\right) \end{cases}$$

En tenant compte des conditions initiales :

$t = 0$:

$x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$

Nous écrivons le nouveau système de trois équations différentielles :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = C^{te} = \dot{x}(0) = 0 \to (3) \\ m\ddot{y} = qB\dot{z} \Rightarrow \ddot{y} = \dfrac{q}{m}B\dot{z} \Rightarrow \dot{y} = \dfrac{q}{m}Bz \to (4) \\ m\ddot{z} = q\left(E - B\dot{y}\right) \Rightarrow \ddot{z} = \dfrac{q}{m}E - \dfrac{q}{m}B\dot{y} \to (5) \end{cases}$$

Dans l'équation différentielle (5) on remplace $\dot{y}$ par sa valeur tirée de l'équation (4) :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \to (6) \\ \dot{y} = \omega z \to (7) \\ \ddot{z} + \left(B\dfrac{q}{m}\right)^2 z = \dfrac{q}{m}E \to (8) \end{cases}$$

En posant $\omega = B\dfrac{q}{m}$, la solution de l'équation (8) est :

$$z = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t + \frac{qE}{m}\left(\frac{m}{qB}\right)^2$$

$$\boxed{z = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t + \frac{mE}{qB^2}} \rightarrow (9)$$

Déterminons α et β à partir des conditions initiales en utilisant les deux équations :

$$z = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t + \frac{mE}{qB^2}$$

$$\dot{z} = \alpha\omega \cos \omega t - \beta\omega \sin \omega t$$

$$t = 0 \ , \ z(0) = 0 \ , \ \dot{z}(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \ , \ \beta = -\frac{mE}{qB^2}$$

Nous obtenons à la fin l'expression $z(t)$:

$$z(t) = -\frac{mE}{qB^2}\cos \omega t + \frac{mE}{qB^2} \Rightarrow z(t) = \underbrace{\frac{mE}{qB^2}}_{a}\left(1 - \cos \underbrace{\omega t}_{\theta}\right)$$

$$\boxed{z(t) = a(1 - \cos\theta)}$$

Il nous reste à définir l'équation $y(t)$. Dans l'équation (7) on remplace z , puis on intègre pour arriver à l'expression $y(t)$:

$$\dot{y} = \omega a(1 - \cos\theta) \Rightarrow \dot{y} = \omega a - \omega a \cos \underbrace{\omega t}_{\theta}$$

$$y(t) = a(\omega t - \sin \omega t) \Rightarrow \boxed{y(t) = a(\theta - \sin\theta)}$$

Finalement :

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = a(\theta - \sin\theta) \\ z(t) = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

Se sont là les équations paramétriques caractéristiques d'une cycloïde.